

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

(L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé)

Coefficient : 5

Durée : 4 heures

EXERCICE N°1 (4 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Unité graphique : 2cm

- 1) Soit le nombre complexe $z_0 = 2 + i$
 - a) Montre que z_0 est solution de l'équation
(E) : $z^3 - (3 + 2i)z^2 + (1 + 4i)z + 1 - 2i = 0$. (0,5pt)
 - b) Résous l'équation (E) dans l'ensemble C des nombres complexes. (0,75pt)
- 2) On considère les points A, B et C du plan, d'affixes respectives i ; $2 + i$ et 1 .
 - a) Place les points A, B et C dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ et complète la figure au fur et à mesure. (0,25pt)
 - b) Calcule $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$. (0,5pt)
Écris $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$ sous la forme exponentielle. (0,25pt)
 - c) En déduis la nature du triangle ABC. (0,25pt)
 - d) Soit (C) le cercle circonscrit au triangle ABC.
Détermine l'abscisse du centre I et celle du rayon r du cercle. (0,5pt)
 - e) Soit D l'image de A par la translation de vecteur $\vec{CB}$. Détermine l'abscisse du point D. (0,25pt)
- 3) Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan d'abscisse z vérifiant la relation $|z - 2 - i| = |(2 + i) - 1|$.
 - a) Montre que (Γ) décrit un cercle dont on précisera le centre et le rayon. (0,25pt)
 - b) Justifie que le point D appartient à (Γ) . (0,25pt)

EXERCICE N°2 (4 points)

Dans le tableau ci-dessous sont consignés les quantités mensuelles des pagnes cocodonda fabriqués par une entreprise locale au cours du premier semestre de l'année 2024.

Mois	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet
Rang du mois x_i	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de pagnes produits	100	110	160	165	170	200	215

Selon la direction de l'entreprise, à cause des coûts de production très élevés, celle-ci ne pourra plus produire des pagnes après décembre 2024 si la production mensuelle reste inférieure à 250.

On considère le nuage des points $M_i(x_i; y_i)$ associé au tableau ci-dessus.

- 1) a-) Représente ce nuage des points dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphique 1cm. Prend en abscisse 1cm pour 1 mois et en ordonnée 1cm pour 20 pagnes. (0,5pt)
- b-) Calcule les coordonnées du point moyen G et place ce point dans le repère. (0,75pt)
- 2) a-) Calcule les coordonnées du point moyen G_1 associé aux quatre premiers points du tableau. (0,5pt)
- b-) Calcule les coordonnées du point moyen G_2 associé aux trois derniers points du tableau. (0,5pt)

- c-) Place les points G_1 et G_2 dans le repère. (0,5pt)
d-) Détermine une équation cartésienne de la droite (G_1G_2) et la tracer. (0,5pt)
3) a-) Calcule le nombre des pagnes produits en Décembre 2024. (0,5pt)
b-) L'entreprise continuera-t-elle sa production après Décembre 2024 ? Justifier votre réponse. (0,25pt)

PROBLEME (12 points)

Partie A

Soit f la fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = (x+1)e^{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = 1 - 2x + x \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ du plan. Unité graphique 2 cm.

- 1) Précise l'ensemble de définition de f . (0,5 pt)
- 2) a) Étudie la continuité de f en $x=0$. (0,5 pt)
b) Étudie la dérivabilité de f en $x=0$; puis en déduire que la courbe admet deux demi-tangentes aux points de coordonnées $(0; 1)$ que l'on précisera. (1,5 pt)
- 3) Calcule les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. (1 pt)
- 4) a) Calcule $f'(x)$ suivant les valeurs de x . (0,5 pt)
b) Donne le sens de variation de f et dresser son tableau de variation. (1,5 pt)
- 5) a) Pour $x \leq 0$, détermine les coordonnées du point d'intersection de la courbe (C) avec l'axe des abscisses. (0,5 pt)
b) Détermine une équation cartésienne de la tangente (T) à (C) en ce point. (0,5 pt)
- 6) Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]6; 7[$. (On ne demande pas de calculer α). (0,5 pt)
- 7) a) Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. (1 pt)
b) Interprète géométriquement les résultats obtenus. (0,5 pt)
- 8) Construis la courbe (C) et la droite (T). (0,5 pt + 0,25 pt)

Partie B

Soit h la fonction numérique définie pour tout réel x par $h(x) = -f(x)$

- 1) Dresse le tableau de variation de h . (0,5 pt)
- 2) Trace la courbe représentative (C') de h dans le même repère. (0,25 pt)
- 3) Soit U la fonction définie pour tout $x \leq 0$ par $U(x) = (-x-2)e^{-x}$.
a) Montre que U est une primitive de f . (0,25 pt)
b) Calcule en cm^2 l'aire A du domaine (D) délimité par les courbes (C) et (C') et les droites d'équations $x=-1$ et $x=0$. (0,5 pt)

Partie C

On considère dans le même repère que (C), la courbe (Γ) de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x(t) = \ln t \\ y(t) = (1 - \ln t)t \end{cases} \quad t \geq 1$$

- 1) Détermine une équation cartésienne de (Γ) . (0,5 pt)
- 2) Détermine les coordonnées du vecteur dérivé $\vec{v}(t)$ pour $t=e^{-1}$. (0,5 pt)

On donne $e=2,7$; $e^{-1}=0,36$; $\alpha=6,4$... $\ln 6 = 1,8$; $\ln 7 = 1,9$